

2023年秋季学期哈尔滨工业大学(校本部)期末考试题

代数与几何X

【声明】

1. 本项目为公益项目, 旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用, 请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版, 不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘, 用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出, 可以联系「wuwanweihua@gmail.com」, 我会及时删除.

一. 填空题 (满分10分, 每小题2分)

1. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, 则 $\begin{vmatrix} d & e & f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 在空间直角坐标系中, 直线 $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ 与平面 $\pi: ax + 6y + 2z - 7 = 0$ 平行, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知可逆矩阵 A 的每行元素之和为 3, 则 $9A^{-1} + 2A^2 - 9E$ 的每行元素之和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 空间中曲线 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 3z, x^2 + y^2 = 9$ 在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 且 1 是 AB 的特征值, 则 $\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. 单选题 (满分10分, 每小题2分, 只有一个正确选项)

1. 设向量组 (I) α_2, α_3 ; (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (III) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (IV) $2\alpha_1, 3\alpha_2, 4\alpha_3, \alpha_1 - 3\alpha_4$. 若 (I)、(II)、(III) 的秩均为 2, 则 (IV) 的秩为 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times p$ 矩阵, 若 $AB = 0$, 则必有 ()
 A. 若 $R(A) = n$, 则 $B = 0$
 B. $A = 0$ 或 $B = 0$
 C. B 的行向量是 $AX = 0$ 的解向量
 D. $R(A) + R(B) = n$
3. 设线性变换 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $\alpha_1 = \varepsilon_2, \alpha_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, 则 \mathcal{A} 在基 α_1, α_2 下的矩阵为 B , 下列结论正确的是 ()
 A. $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 且可对角化 B. $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 且可对角化
 C. $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 且不可对角化 D. $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 且不可对角化
4. 设直线 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{0} = z - 2, L_2: x = t + 3, y = 2, z = 3t - 1$, 则 L_1 与 L_2 的夹角为 ()
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

5. 某大学对 2023 级新生记笔记方式进行调查, 每学期有 50% 纸笔学生转为电子方式, 有 20% 电子方式学生转为纸笔方式。设第 k 学期纸笔人数为 a_k , 电子人数为 b_k , 则转移关系正确的是 ()

A. $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$

三. 不定项选择题 (满分2分, 每小题1分)

1. 下列叙述错误的是 ()
- A. 若 A, B 为 n 阶正定矩阵, 则 A 与 B 合同
- B. 三元二次型正惯性指数为 2 时, $f = 1$ 的图形为椭圆柱面
- C. 若 $f = X^T A X, g = Y^T B Y$ 正惯性指数相同, 则存在可逆变换 $X = C Y$ 使 f 化为 g
- D. 若 $X = P Y$ 为正交变换将 $f = X^T A X$ 化为规范形, 则 A 的特征值为 1 或 -1
2. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 列向量组为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, β 为 m 维列向量, 则正确的是 ()
- A. 若 β 与 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 秩相同, 则 β 可线性表示
- B. $A^T A X = 0$ 与 $A X = 0$ 的解空间维数相同
- C. 若 β 相关且 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 无关, 则 $A X = \beta$ 有唯一解
- D. 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 构成 \mathbb{R}^m 的一组基, 则 $A X = \beta$ 有解

四. (满分8分)

1. 设 V 为二维向量空间, $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 3)^T, \beta_1 = (1, 8, 3)^T, \beta_2 = (1, 5, 1)^T$ 为两组基:
- (1) 求由 α_1, α_2 到 β_1, β_2 的过渡矩阵 P ;
- (2) 若向量 α 在 α_1, α_2 下坐标为 $(2, -3)^T$, 求其在 β_1, β_2 下的坐标。

五. (满分8分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 A 与 D 相似, 求 x, y 。

六. (满分8分)

1. 已知平面 $\pi_1: x - 2y + 3z - h = 0, \pi_2: 2x - 3y - z - 2h = 0, \pi_3: x - y + kz - 4 = 0$ 交于一条直线, 求 h, k , 并写出该直线的参数方程。

七. (满分10分)

1. 设三元二次型 $f = X^T A X$ 可经正交变换 $X = P Y$ 化为 $f = ay_1^2 + ay_2^2 - 2y_3^2$, 且 P 的第三列为 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$, 并且 $\text{tr}(A) = 12$:
- (1) 求 A 的全部特征值;
- (2) 求正交矩阵 P ;
- (3) 方程 $f = 1$ 表示何种曲面?

八. (满分4分)

1. 设 $A = \alpha\beta^T$ ，其中 α, β 为两个非正交的三维实列向量。判断下列结论是否正确，并说明理由：
- (1) A 可相似对角化；
 - (2) A 都与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同。