

2024年秋季学期哈尔滨工业大学(一区三区)期末考试试题

# 代数与几何X

## 【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「[wuwanweihua@gmail.com](mailto:wuwanweihua@gmail.com)」,我会及时删除.

### 一. 填空题 (满分10分, 每小题2分)

1. 行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 在空间直角坐标系中, 点  $M(2, 0, 1)$  到平面  $\pi: 5x + 3y - 4z + 4 = 0$  的距离  $d = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 已知  $A$  为 3 阶可逆矩阵, 且特征值为  $1, -1, \frac{1}{5}$ , 若矩阵  $B$  与  $A$  相似, 则  $|B^{-1} - 2E| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 母线平行于  $y$  轴, 且通过空间曲线  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, x^2 - y^2 + z^2 = 0$  的柱面的方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $A$  为 2 阶方阵, 若  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 则  $A^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 二. 单选题 (满分10分, 每小题2分, 只有一个正确选项)

1. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三元非齐次线性方程组  $AX = \beta$  的三个解向量, 且  $R(A) = 2, \alpha_1 + \alpha_2 = (2, 0, -2)^T, \alpha_2 + 2\alpha_3 = (4, 5, -1)^T, k$  为任意常数, 则  $AX = \beta$  的通解为 ( )

- A.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$     B.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$     C.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$     D.  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. 设  $A$  为  $n$  阶实矩阵, 下列命题错误的是 ( )

- A.  $R(A) = R(AA^T)$   
 B. 若对任意非零实向量  $X$  有  $X^TAX > 0$ , 则  $A$  为正定矩阵  
 C. 若  $A$  为正定矩阵, 则  $A$  可逆  
 D.  $A$  可逆的充要条件为  $A^T A$  为正定矩阵

3. 设  $\mathcal{A}$  为二维线性空间  $V_2$  中的线性变换,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  与  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $V_2$  的两组基, 满足  $\alpha_1 = \varepsilon_2, \alpha_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ , 且  $\mathcal{A}(\alpha_1) = 2\alpha_2, \mathcal{A}(\alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$ , 则  $\mathcal{A}$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  下的矩阵为 ( )

- A.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$     B.  $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$     C.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$     D.  $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

4. 直线  $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}, L_2: x = a_2t + a_3, y = b_2t + b_3, z = c_2t + c_3$  相交于一点, 设  $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)^T$ , 则方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \alpha_3$  的情况为 ( )

- A. 有唯一解    B. 有无穷多解    C. 无解    D. 无法判断

5. 某地统计大熊猫种群变化, 每年新生大熊猫中 95% 在下一年成长为成年大熊猫, 下一年新生数量为上一年成年数量的 6%, 成年大熊猫中每年有 3% 因疾病死亡。设第  $k$  年新生数量为  $j_k$ , 成年数量为  $a_k$ , 则正确的递推关系为 ( )

A. 
$$\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.06 \\ 0.97 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$$

B. 
$$\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.06 \\ 0.95 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$$

C. 
$$\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 & 0 \\ 0.95 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$$

D. 
$$\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 & 0 \\ 0.97 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$$

三、不定项选择题 (满分2分, 每小题1分)

1. 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $AX_i = \lambda_i X_i$ ,  $X_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 下列叙述错误的是 ( )
- A.  $X_1, X_2, X_3$  线性无关
- B. 若  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  互不相同, 则  $A$  可相似对角化
- C. 若  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , 则  $A$  不可相似对角化
- D. 若  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , 则  $A$  的特征向量为  $k_1 X_1 + k_2 X_2, k_3 X_3$
2. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  为  $n$  维实向量空间中的两个向量组, 则下列叙述错误的是 ( )
- A. 若  $r \leq s$ , 则  $\beta_1, \dots, \beta_s$  不可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性表示
- B. 若  $\beta_1$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  表示, 则存在不全为零的  $k_1, \dots, k_r$
- C. 若矩阵  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ,  $B = (\beta_1, \dots, \beta_s)$  等价, 则两向量组等价
- D. 若向量组中任意两个向量正交, 则该向量组线性无关

四、(满分 8 分)

1. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  为 2 维向量空间  $V$  的基。
- (1) 设  $\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$ , 求一个向量  $\gamma_2$ , 使得  $\gamma_1, \gamma_2$  为  $V$  的一个规范正交基;
- (2) 求基  $\alpha_1, \alpha_2$  到 (1) 中求出的基  $\gamma_1, \gamma_2$  的过渡矩阵。

五、(满分 8 分)

1. 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

矩阵  $X$  满足  $AX = 2E - X$ , 求  $X$ 。

六、(满分 8 分)

1. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + ax_3 = 2, \\ x_1 + ax_2 = b, \end{cases}$$

问当  $a, b$  为何值时此线性方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解? 当有无穷多解时写出通解。

七、(满分 10 分)

1. 设  $f = X^T A X$  为 3 元实二次型, 若  $A$  的各行元素和为 2,  $\text{tr}(A) = 8$ , 且线性方程组  $(E - A)X = 0$  有非零解  $(1, 0, -1)^T$ .
- (1) 求  $A$  的所有特征值;
  - (2) 求正交线性变换  $X = P Y$ , 将  $f$  化为标准形;
  - (3) 求矩阵  $A$ .

#### 八、(满分 4 分)

1. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是  $m$  个  $n$  维实列向量, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}.$$

判断下面命题是否正确, 并写出判断结论。若认为正确, 请给予证明; 若认为错误, 请举出反例, 并给出说明。

- (1) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则  $|A| = 0$ ;
- (2) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则  $|A| > 0$ 。