

2022年秋季学期哈尔滨工业大学(深圳)期末考试题

复变函数与积分变换(A)

【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「wuanweihua@gmail.com」,我会及时删除.

一、填空题(每小题2分,共20分)

1. 复数 $\frac{1}{2}(1-3i)$ 的主辐角是 _____。
2. $\ln \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} =$ _____。
3. 函数 $f(z) = x^2 + 2xyi$ 在 _____ 或实轴可导。
4. 已知函数 $f(z) = u + iv$ 是解析函数, $f(0) = 1$, 且 $v = e^x \sin y$, 则 $f(z) =$ _____ 或 $e^x(\cos y + i \sin y)$ 。
5. 设 C 是正向的圆周 $|z| = 1$ 。则 $\oint_C z \cos \frac{1}{z} dz =$ _____。
6. 设函数 $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, 则 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z^{n-1} |f(z)|^2 dz =$ _____。
7. 设函数 $\frac{e^{\frac{z}{1-z}} \cos z}{(z^2 + 3z + 2)e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R =$ _____。
8. 洛朗函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{z}{2}\right)^n$ 的收敛圆环域为 _____。
9. 设 $f(t) = t \sin 2t$, 则其拉氏变换 $\mathcal{L}(t \sin 2t) =$ _____。
10. 设 $f(t) = e^{-|t|} \cos t$, 则其傅氏变换 $F(\omega) =$ _____。

二、选择题(每小题2分,共20分)

1. 设 $w = \sqrt[2022]{1}$ 且 $w \neq 1$, 则 $1 + w + w^2 + \dots + w^{2021} =$ (B)。
 A. 1 B. 0 C. -1 D. 2022
2. 下列命题正确的是 ()。
 A. $\forall z \in \mathbb{C}, e^z > 0$; B. $f(z) = e^{\bar{z}}$ 是 z 的解析函数;
 C. $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$; D. $f(z) = e^{z/3}$ 的周期是 πi 。
3. 下列命题正确的是 ()。
 A. 若 $f'(z_0)$ 存在, 则函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析。
 B. 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点, 则 $f(z)$ 在 z_0 点不可导。
 C. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域里可导。
 D. 若函数 $f(z)$ 的实部与虚部为调和函数, 则 $f(z)$ 解析。
4. 设函数 $f(z) = \frac{1}{(z-4)^2} - \frac{4}{(z-4)^3} + \frac{4^2}{(z-4)^4} - \dots, |z-4| > 4$, 则 ()。
 A. $z = 4$ 是 $f(z)$ 的二阶极点; B. $z = 4$ 是 $f(z)$ 的本性奇点;
 C. $\text{Res}[f(z), 4] = 0$; D. A,B,C 均不正确。

5. 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 是函数 $g(z)$ 的 n 阶零点, 且 $n > m$, 则 z_0 是函数 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的 ()。
- A. $n - m$ 阶零点 B. $n - m$ 阶极点 C. 可去奇点 D. 本性奇点
6. 下列哪个函数在指定点的去心邻域内可展成洛朗级数 ()。
- A. $\cos \frac{1}{z}, z = \infty$; B. $\frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}, z = 0$;
 C. $\ln z, z = 0$; D. $\ln z, z = \infty$ 。
7. 若函数 $f(z) = u + iv$ 在 $z_0 = x_0 + y_0i$ 解析, 则 $f'(z_0) \neq$ ()。
- A. $u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$; B. $u_y(x_0, y_0) + i v_y(x_0, y_0)$;
 C. $v_y(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$; D. $u_x(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$ 。
8. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{2^n} z^{2n}$ 的收敛半径是 ()。
- A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$; B. $\sqrt{\frac{3}{2}}$;
 C. $\sqrt{2}$; D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 。
9. 函数 $f(t) = 3$ 的拉氏变换是 ()。
- A. $\frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$; B. $\frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 1$;
 C. $\frac{3}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$; D. $\frac{3}{s}, \operatorname{Re}(s) > 3$ 。
10. 设函数 $f(t) = \delta(t - t_0)$, 则它的傅氏变换是 ()。
- A. 1; B. 2π ;
 C. $e^{i\omega t_0}$; D. $e^{-i\omega t_0}$ 。

三、运算题 (每小题5分, 共10分)

1. 计算 $I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^{2022} + 2)(z - 3)}$ 。
2. 计算 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 2x + 5} dx$ 。

四、(10分)

求函数 $f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}$ 在区域 $1 < |z| < 2$ 内的洛朗展开式。

五、(10分)

利用拉普拉斯变换求解下列初值问题:

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -12, \\ y(0) = 8, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

六、(5分)

设函数 $f(z)$ 及函数 $g(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析。又设 $f(z)$ 的所有零点 a_1, a_2, \dots, a_n 都在 $|z| < 1$ 内, 且它们的阶数分别为 m_1, m_2, \dots, m_n , 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{f'(z)g(z)}{f(z)} dz$ 。

七、(5分)

设函数 $f(z)$ 在 $|z| < R (R > 1)$ 内解析。证明:

$$\operatorname{Re} \left\{ \oint_{|z|=1} \overline{f(z)} f'(z) dz \right\} = 0.$$