

2023年秋季学期哈尔滨工业大学(深圳)期末考试题

复变函数与积分变换(A)

【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖。
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「wuwanweihua@gmail.com」,我会及时删除。

一、填空题(每小题2分,共20分)

1. 复数 $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ 的主辐角是 _____。
2. $\ln [(-\sqrt{3} + i)^8] =$ _____。
3. 函数 $f(z) = z\text{Re}(z) + \bar{z}\text{Im}(z) + \bar{z}$ 在 _____ 可导。
4. 已知函数 $f(z) = 2(x - 1) + iv$ 是解析函数,其中 $v = v(x, y)$,且 $f(2) = -i$,则 $f(z) =$ _____。
5. 设 C 是正向圆周 $|z| = 2$,则 $\oint_C z \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} \right) dz =$ _____。
6. 设函数 $f(z) = u + iv$ 在 $|z| < R (R > 1)$ 内解析,则 $\oint_{|z|=1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) =$ _____。
7. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - 2i)^n$ 在 $z = 0$ 处收敛,在 $z = -2 + 2i$ 处发散,则其收敛半径 $R =$ _____。
8. 洛朗级数 $\frac{1}{z^{2023}} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\ln z) z^n$ 的收敛圆环为 _____。
9. 设 $F(s) = \frac{-5}{(s+1)^2+25}$,其拉氏逆变换 $f(t) =$ _____。
10. 设 $f(t) = \cos t + \sqrt{3}\sin t$,其傅氏变换 $F(\omega) =$ _____。

二、单项选择题(每小题2分,共20分)

1. 设 $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$,则 $1 + z^{100} + z^{200} =$ ()。
A. 1 B. 0 C. -1 D. 2
2. 下列命题正确的是 ()。
A. $\forall z \in \mathbb{C}, |\sin z| \leq 1$ B. $f(z) = \ln z$ 没有孤立奇点
C. $\forall z \in \mathbb{C}, \arg z^2 = 2 \arg z$ D. $f(z) = e^z$ 的周期是 π
3. 设 $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$,则 $f(i - 2) =$ ()。
A. $2\sqrt{2}e^{i\pi/8}$ B. $\pm 2\sqrt{2}e^{i\pi/8}$ C. $2^{5/4}e^{i\pi/8}$ D. $\pm 2^{5/4}e^{i\pi/8}$
4. $z = \infty$ 是函数 $f(z) = \frac{z^9}{(z-2)^2(1+z^2)^3}$ 的 ()。
A. 可去奇点 B. 一阶极点 C. 本性奇点 D. 非孤立奇点
5. $z = 0$ 是函数 $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$ 的 ()。
A. 非孤立奇点 B. 一阶极点 C. 可去奇点 D. 本性奇点
6. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - 2)^n$ 在 $z = 4$ 处发散,则它必定在 ()。
A. $z = 0$ 收敛 B. $z = 3$ 收敛 C. $z = -1$ 发散 D. A,B,C 均不正确
7. 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < R (R > 1)$ 内解析,则对于正向圆周 $C: |z| = 1$,有 $\oint_{|z|=1} f(z) dz =$ ()。
A. $2\pi i f(0)$ B. $2\pi i \overline{f(0)}$ C. $2\pi i f'(0)$ D. $2\pi i \overline{f'(0)}$
8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n^2} z^{2n+1}$ 的收敛半径是 ()。
A. $R = 1$ B. $R = 3$ C. $R = \frac{1}{3}$ D. $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$
9. 设 $F(s) = \frac{4}{s^2+4}$,则其拉氏逆变换是 ()。

- A. $4 \sin t$ B. $\sin 4t$ C. $2 \sin 2t$ D. $\sin 2t$

10. 下列傅氏变换中不正确的是 ()。

- A. $\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - \omega_0)] = e^{i\omega_0 t}$ B. $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
 C. $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ D. $\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{i\omega}$

三、运算题（每小题5分，共10分）

1. 设

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{z^{2023} dz}{(z+2)^{2023}(z-2)^{2023}(z-4)}$$

2. 设

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

三、运算题（每小题5分，共10分）

1. 设

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{z^{2023} dz}{(z+2)^{2023}(z-2)^{2023}(z-4)}$$

2. 设

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

四、计算题（10分）

1. 求函数 $f(z) = \frac{z^{200}}{(z-1)(z+2)}$ 在区域 $1 < |z| < 2$ 内的洛朗展开式。

五、计算题（10分）

1. 利用拉普拉斯变换求解初值问题：

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 2, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

六、计算题（8分）

1. 设函数 $f(z) = \frac{z-2}{z^2-7z+12}$ ，计算

$$I_n = \oint_{|z-2|=\frac{1}{4}} \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

七、证明题（2分）

1. 设函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，且 $\{|z-a| \leq R\} \subset G$ 。证明：若 $|f(z)| \leq M$ 对一切 $|z-a| = R$ 成立，则对任意 $w_1, w_2 \in \{|z-a| \leq \frac{1}{2}R\}$ 有

$$|f(w_1) - f(w_2)| \leq \frac{4M}{R}|w_1 - w_2|$$