

2023年秋季学期哈尔滨工业大学(校本部)期末考试题

数学分析 I

【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「wuwanweihua@gmail.com」,我会及时删除.

一. 选择题

1. 下列函数在 $x = 0$ 处不可导的是 ()
 A. $|x|\sin|x|$ B. $|x|\sin\sqrt{|x|}$ C. $\cos|x|$ D. $\cos\sqrt{|x|}$
2. 如果 $\int f(x)e^{-1/x} dx = -e^{-1/x} + C$, 则函数 $f(x) =$ ()
 A. $-\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x}$ C. $-\frac{1}{x^2}$ D. $\frac{1}{x^2}$
3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 ()
 A. $k = 1, c = 4$ B. $k = 1, c = -4$ C. $k = 3, c = 4$ D. $k = 3, c = -4$
4. 函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的最小值为 ()
 A. 1 B. $1 + e^{-2}$ C. -1 D. 0
5. 设 $f(x)$ 是连续函数, 当 $x \in (-1, 1)$ 时 $f''(x) > 0$, 且 $|f(x)| \leq x^4$, 记 $I = \int_0^1 f(x) dx$, 则 ()
 A. $I = 0$ B. $I > 0$ C. $I < 0$ D. 无法判断

二. 填空题

1. 已知 $x^2y + xy^2 = 2$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1, y=1} =$ _____ .
2. 曲线 $y = (x - 5)x^{2/3}$ 的拐点横坐标 $x =$ _____ .
3. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx =$ _____ .

4. 曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的渐近线为 _____ .
5. 曲线 $r = e^\theta$ 在 $[\pi, 2\pi]$ 上的弧长为 _____ .

三. 解答题

1. 计算题
 (1) 设

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = \int_0^t \arctan e^{u+2023} du, \end{cases}$$

求 $\left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{t=-2023}$.

(2) 计算 $\int_{-2023\pi}^{2023\pi} x \sin x dx$ 。

2. 已知抛物线 $y = \sqrt{3x+1}$ 与 y 轴交于点 P , 过点 P 作抛物线的法线, 该法线与 x 轴交于点 C 。求抛物线与 x 轴及法线 PC 所围成的平面图形面积 S , 以及该平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积 V 。

3. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \ln(1 + \sqrt{t}) dt + x^2 \int_{-2}^2 x \arctan e^{x^2+2024} dx}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2} \cdot \arcsin \sqrt[3]{x^2}}.$$

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 均在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且满足

$$f(x) = \int_0^x f(x-t) dt + x, \quad g(x) = f(x) + 2 \int_0^1 g(t) dt,$$

求 $g(x)$ 的表达式。

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上导数连续, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx \geq \frac{1}{e}.$$