

2024年秋季学期哈尔滨工业大学(一校三区)期末考试题

# 数学分析 I

## 【声明】

1. 本项目为公益项目, 旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用, 请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版, 不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘, 用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出, 可以联系「[wuwanweihua@gmail.com](mailto:wuwanweihua@gmail.com)」, 我会及时删除.

### 一. 选择题 (每小题2分, 共10分)

1. 下列函数中在  $x = 0$  处可导的是 ( )
 

A.  $|\tan x - \sin x|$       B.  $|\tan x + \sin x|$       C.  $\tan|x| + \sin|x|$       D.  $|\tan x| + |\sin x|$
2. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续且  $f(x) > 0$ ,  $\{c_n\} (n = 1, 2, \dots)$  为正值数列, 记  $a_n = \int_0^{c_n} f(x) dx$ ,  $b_n = \int_{c_n}^{c_{n+1}} f(x) dx$ , 则正确的是 ( )
 

A. 当  $b_n < 0$  时,  $\{a_n\}$  必发散;  
 B. 当  $b_n < 0$  时,  $\{a_n\}$  必收敛;  
 C. 当  $b_n > 0$  时,  $\{a_n\}$  必发散;  
 D. 当  $b_n > 0$  时,  $\{a_n\}$  必收敛.
3. 已知函数  $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$ ,  $g(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ , 则 ( )
 

A.  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数;  
 B.  $f(x)$  是偶函数,  $g(x)$  是奇函数;  
 C.  $f(x)$  与  $g(x)$  均为奇函数;  
 D.  $f(x)$  与  $g(x)$  均为周期函数.
4. 设  $C_1, C_2$  为任意常数, 则微分方程  $y'^2 - yy'' = 0$  的通解为 ( )
 

A.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$     B.  $y = C_1 + C_2 e^x$       C.  $y = C_2 e^{C_1 x}$       D.  $y = C_2 x e^{C_1 x}$
5. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1^3} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2^3} + \dots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n^3} \right) = ( )$ 

A.  $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1} dx$       B.  $\int_0^1 \frac{2}{x^3 + 1} dx$   
 C.  $\int_0^1 \frac{x + 1}{x^3 + 1} dx$       D.  $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} dx$

### 二. 填空题 (每小题2分, 共10分)

1. 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{xt}$ , 则曲线  $y = f(x)$  的拐点横坐标  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .
2. 曲线  $y = x e^{\frac{1}{x}}$  的渐近线为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
3. 积分  $\int_{-2024}^{2024} [\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 1] dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .
4. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^{3x} (e^{-t^2} - 1) dt, & x \neq 0, \\ a - 9, & x = 0, \end{cases}$$

在  $x = 0$  处连续, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $\cos x$ , 则  $\int_0^{2\pi} x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三. 解答题 (共30分)

1. (7分) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = \int_0^{x^2} \cos t^2 dt$  与  $g(x) = a \sin x - b \ln(1+x)$  是等价无穷小, 求  $a, b$  的值.

2. (7分) 计算积分  $\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx$ .

3. (8分) 设曲线  $C$  是星线在第一象限的部分  $C_1$ , 具有参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta, \end{cases} \quad (a > 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]),$$

试计算:

- (1) (数学分析(1)、数学分析X(1)) 曲线  $C$  绕  $x$  轴旋转所得旋转体的侧面积.
  - (2) (微积分A(1)) 曲线  $C$  绕  $y$  轴旋转所得旋转体的侧面积.
  - (3) (微积分B(1)) 曲线  $C$  的弧长.
  - (4) (微积分C(1)) 曲线  $C$  与两坐标轴所围区域绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积.
  - (5) (微积分D(1)) 曲线  $C$  与两坐标轴所围区域绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积.
  - (6) (微积分F(1)) 曲线  $C$  与两坐标轴所围区域的面积.
4. (4分) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $f(x) = \int_0^x 2t e^{-f(t)} dt$ , 求  $f^{(2n)}(0)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).
5. (4分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上导数连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$