

2025年秋季学期哈尔滨工业大学(一校三区) 期末考试试题

数学分析 I

【声明】

1. 本项目为公益项目, 旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用, 请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版, 不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘, 用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出, 可以联系「wuwanweihua@gmail.com」, 我会及时删除.

一、选择题

1. 方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t^2} dt = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内根的个数为
 A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 不确定
2. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln [f(x+1) + e^{x^2}]}{x^2} = 2$, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的
 A. 驻点且为极大值点 B. 驻点且为极小值点
 C. 不可导点 D. 可导点但不是驻点
3. 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x = 0$ 外 $f(x)$ 处处连续, $x = 0$ 是 $f(x)$ 第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是
 A. 连续的奇函数 B. 在 $x = 0$ 间断奇函数
 C. 连续的偶函数 D. 在 $x = 0$ 间断偶函数
4. 微分方程 $y''(x + y^2) = y'$ 满足 $y'(1) = y(1) = 1$ 的特解是
 A. $y = x$ B. $y = \sqrt{x} + 1$ C. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$ D. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$
5. 函数 $f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 最大整数, 则 $f(x)$ 所有渐近线有
 A. 0条 B. 1条 C. 2条 D. 3条

二、填空题

6. 函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = e^t + t \\ y = t + \sin t \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $t = 0$ 处曲率为 ____.
7. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right) =$ ____.
8. 计算 $\int_{-1}^1 x(1 + x^{2025})(e^x - e^{-x}) dx =$ ____.
9. 设 $y = f(x)$ 由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定, 则 $y''(0) =$ ____.
10. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{ax} = \int_{-a}^0 te^t dt$, 则 $a =$ ____.

三、解答题

11. (1) (数学分析 I) $\int_{-2}^3 |x^2 - 2x| dx + \int_{-2}^2 \arctan(2026x^3) dx$
 (2) (微积分 B) $\int_{-2}^2 |x^2 - 2x| dx + \int_{-2}^2 x \arctan(x^{2026}) dx$

(3) (微积分 C) $\int_0^3 |x^2 - 2x| dx + \int_{-2}^2 \arctan x^{2025} dx$

(4) (微积分 D) $\int_{-2}^2 |x^2 - 2x| dx$

12. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^{x^2} \frac{[\ln(1+t) - 1] \sin(3t)^2}{\arcsin^2 t} dt}{(x^2 - x \tan x) \int_0^1 (-3x) e^{x+2026} dx}$

13. 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2 \ln c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形面积为 $\frac{1}{3}$, 试确定 a, b, c , 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且满足 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x) dt = x^2 \ln(1+x)$, 其中 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $f(x)$.

15. 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 且 $|f(x)| < 1$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明: 对 $\forall a, b \in [0, 1]$, 均有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2}.$$