

2025年秋季学期哈尔滨工业大学(威海)期中考试题

数学分析 I

【声明】

1. 本项目为公益项目, 旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用, 请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版, 不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘, 用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出, 可以联系「wuwanweihua@gmail.com」, 我会及时删除.

一、单选题

1. 设 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x_0) = 2$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$, $f(x)$ 在点 x_0 处微分 dy 是
 A. 与 $5\Delta x$ 等价无穷小量 B. 与 Δx 同阶无穷小量
 C. 比 Δx 高阶无穷小量 D. 比 Δx 低阶无穷小量
2. $x \rightarrow 1^+$ 时, 与 $\sqrt{x-1}$ 等价无穷小量是
 A. $\sqrt{1+\sqrt{x-1}} - 1$ B. $-\arctan \sqrt{x-1}$ C. $\ln \frac{x}{1-\sqrt{x-1}}$ D. $1 - \cos \sqrt{x-1}$
3. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 所对应点处切线方程是
 A. $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $x + y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $x - y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $x - y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{ax^2 + bx + 15}) = \frac{1}{2}$, 则下列表达式错误的是
 A. $ab = -8$ B. $a + 2b = 0$ C. $a + b = 2$ D. $a - b = -6$
5. 设函数 $f(x) = (x+1)^n e^{-x^2}$, 则 $f^{(n)}(-1) =$
 A. 0 B. $\frac{n!}{e}$ C. $\frac{n!}{e^2}$ D. $\frac{(n+1)!}{e^n}$
6. 已知 $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$, 则下列说法正确的是
 A. $x=0$ 为 $f(x) + g(x)$ 第一类间断点 B. $x=0$ 为 $f(x) + g(x)$ 第二类间断点
 C. $x=1$ 为 $f(x) + g(x)$ 第一类间断点 D. $x=1$ 为 $f(x) + g(x)$ 第二类间断点
7. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 则 $y''(0) =$
 A. 1 B. -1 C. 2 D. -2
8. 设 $x = f(y)$ 是函数 $y = x + \ln x$ 反函数, 则 $\frac{d^2 f}{dy^2} =$
 A. $\frac{1}{(1+x)^3}$ B. $-\frac{1}{(1+x)^3}$ C. $\frac{x}{(1+x)^3}$ D. $\frac{x^2}{(1+x)^3}$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+\sqrt{2}} + \dots + \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \right) =$
 A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$
10. 函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 2f(x)}{x-2} =$
 A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

二、不定项选择题

11. 下列说法正确的是

- A. $a > 0$ 且 $b > 0$ 时, 方程 $x = a \sin x + b$ 至少有一个正根, 且不超过 $a + b$
- B. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 也必收敛
- C. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 必有界
- D. $\ln(1 + \tan(\sin(7x^2))) \sim \tan(\sin(7x^2)) \sim \sin(7x^2) \sim 7x^2$
- E. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 必存在
12. 设有一圆锥形水池, 锥顶点朝上, 高10 m, 底面圆半径为4 m, 水以 $\pi \text{ m}^3/\text{min}$ 的速率流入水池, 则下列说法正确的是
- A. 水深1 m时, 水面上升速率为 $\frac{25}{256} \text{ m/min}$
- B. 水深3 m时, 水面上升速率为 $\frac{25}{144} \text{ m/min}$
- C. 水深5 m时, 水面上升速率为 $\frac{1}{4} \text{ m/min}$
- D. 水深7 m时, 水面上升速率为 $\frac{25}{196} \text{ m/min}$
- E. 水深9 m时, 水面上升速率为 $\frac{25}{324} \text{ m/min}$

三、解答题

13. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} (\sqrt{1 + \tan^4 x} - \sqrt{1 - 2 \sin(x^4)})}{(1 - \cos 3x)(e^{\sin x} - 1) \arctan x}$

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) + A & x > 1 \\ \arctan(x-1) + \sin \frac{\pi}{2}x & x \leq 1 \end{cases}$

- (1) 常数 A 取何值时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续
- (2) 在(1)条件下, 求 $f'(x)$

15. 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 数列 $\{u_n\}$ 满足 $(u_n)^2 u_{n+1} - u_n u_{n+1} + u_{n+1} - (u_n)^2 = 0$, 其中 $0 < u_1 < 1$, 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.