

2024年春季学期哈尔滨工业大学(威海)期末考试题

数学分析II

【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「wuwanweihua@gmail.com」,我会及时删除.

一、填空、选择题(每题2分,共18分)

1. 计算 $\int_0^\pi dx \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy =$ _____。
2. 设曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 则 $\oint_L (x^2 + 2y^2 + z) ds =$ _____。
3. 当 $|x| \leq 1$ 时, $f(x) = x \arctan x$ 的 Maclaurin 级数 $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, 则 $a_{12} =$ _____。
4. 设 $f(x)$ 为 2 周期函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时 $f(x) = 1 - x$, 若 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos n\pi x$, 则 $\sum_{n=1}^\infty a_{2n} =$ _____。
5. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi)$ 上 $f(x) = \begin{cases} -1 + x, & -\pi \leq x < 0 \\ 1 + 2x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 设 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(11\pi) =$ _____。
6. 下列级数中, 收敛的是 ()。

A. $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}$	B. $\sum_{n=1}^\infty \frac{3^n n!}{n^n}$
C. $\sum_{n=1}^\infty n^5 \left(\frac{4n+3}{3n+2}\right)^n$	D. $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$
7. 设常数 $p > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \sin n}{(1 + (\arctan pn)^2) n^{p+\frac{1}{2}}}$ ()。

A. 发散	B. 条件收敛	C. 绝对收敛	D. 与 p 有关
-------	---------	---------	-------------
8. 设区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D \min(x, y) dx dy =$ _____。
9. 设区域 Ω 由半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z (z \geq 1)$ 与旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 围成, 则下列累次积分中, 不等于 $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ 的个数为 ()。

A. 1个	B. 2个	C. 3个	D. 4个
-------	-------	-------	-------

二、填空题(每题4分,共12分)

1. 设 $\{a_n\}$ 单调递减, $a_n > 0$, 若 $\sum (-1)^n a_n$ 发散, 则 $\sum \frac{a_n^2}{na_{n+1}} (x-2)^{2n}$ 的收敛区间为 _____。
2. 计算 $\oint_L 3xz dy + yz dx - xy dz =$ _____, 其中 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 从 z 轴正向看为顺时针方向。
3. 设曲线 $\Gamma: 4x^2 + 4x + 4y^2 = 1$, 从 $A(0, -\frac{1}{2})$ 经 $B(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 0)$ 到 $C(0, \frac{1}{2})$, 则 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} =$ _____。

三、计算题 (5小题, 共55分)

1. 计算 $\iint_D xy \, dx \, dy$, 其中 D 由 $y = -x$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{x-x^2}$ 围成。(8分)
2. 计算曲线积分 $\int_L (e^x \sin y + xe^{x^2})dx + (e^x \cos y + \ln(1+y^2) + x^3)dy$, 其中 L 为圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 上半部分, 从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 。(10分)
3. 设 $u_n(x) = 3^{-nx} + \frac{n+1}{n!}x^{n-1}$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数。(10分)
4. 曲面 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 被圆柱 $x^2 + y^2 = 2y$ 截得部分, 已知 $du = y(e^y + \cos x)dx + [x(1+y)e^y + \sin x]dy$, $u(0,0) = 0$, 求 $\iint_{\Sigma} (u(x,y) + yz^3)dS$ 。(12分)
5. 曲面 $S: z = x^2 + y^2 - 1$, 取 $z = 0$ 与 $z = 3$ 之间部分的下侧, 向量场 $\mathbf{F} = (x^3 + y)\mathbf{i} + (y^3 + xz)\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}$.
 - (1) 计算 $\text{rot } \mathbf{F}$ 。(5分)
 - (2) 求流量 Φ 。(15分)

四、证明题 (1题, 共15分)

1. 已知正项级数 $\sum a_n$ 发散, $\sum b_n$ 为任意项级数, $a_n \neq 0, b_n \neq 0$.
 - (1) 若 $\sum |b_n|$ 收敛, 证明 $\sum b_n$ 收敛。
 - (2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|b_n|}{a_n}, \frac{1}{a_{n+1}} \right) < 0$, 证明 $\sum |b_n|$ 发散。