

2025年春季学期哈尔滨工业大学(一校三区) 期末考试题

# 数学分析II

## 【声明】

1. 本项目为公益项目, 旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用, 请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版, 不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘, 用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出, 可以联系「[wuwanweihua@gmail.com](mailto:wuwanweihua@gmail.com)」, 我会及时删除.

### 一、单项选择题 (每题2分, 共10分)

1. 函数  $z = z(x, y)$  是由方程  $F(x - z, y - 2z) = 0$  确定, 则下列说法正确的是 ( )
 

A. $\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 1$	B. $\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 1$
C. $\frac{\partial z}{\partial y} - 2\frac{\partial z}{\partial x} = 1$	D. $\frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 1$
2. 设  $L$  是平面  $x - y + z = 2$  与柱面  $x^2 + y^2 = 1$  的交线, 从  $z$  轴正向看去,  $L$  为顺时针方向, 则  $\oint_L (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz = ( )$ 

A. $2\pi$	B. $-2\pi$	C. $4\pi$	D. $-4\pi$
-----------	------------	-----------	------------
3. 设  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 则  $I = \oint_C x dy - y dx$  的值 ( )
 

A. 与 $C$ 的取向无关, 与 $a, b$ 的大小有关	B. 与 $C$ 的取向无关, 与 $a, b$ 的大小无关
C. 与 $C$ 的取向有关, 与 $a, b$ 的大小有关	D. 与 $C$ 的取向有关, 与 $a, b$ 的大小无关
4. 设函数  $P(x, y)$  与  $Q(x, y)$  在连通区域  $G$  内有连续的一阶偏导数, 则下列四条中与其他三条不等价的条件为 ( )
 

A. 在 $G$ 内 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	B. 在 $G$ 内, $\int_{AB} P dx + Q dy$ 与路径无关
C. 在 $G$ 内 $P dx + Q dy$ 是全微分	D. $G$ 内任意闭回路 $C$ , $\oint_C P dx + Q dy = 0$
5. 已知  $a_n < b_n (n = 1, 2, \dots)$ , 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  均收敛, 则 “ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛” 是 “ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  绝对收敛” 的 ( )
 

A. 充要条件	B. 充分不必要条件	C. 必要不充分条件	D. 非充分非必要条件
---------	------------	------------	-------------

### 二、填空题 (每题2分, 共10分)

1. 设  $u = (1 + yx^2 - zy^2) \arctan(xyz)$ , 则  $\text{div}(\text{rot}(\nabla u)) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
2.  $t \in [0, 2]$ ,  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $z = e^{-t}$ , 则  $\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
3. 曲面由方程  $1 = z \cos(xy)$  给出, 求其在  $(0, 0, 1)$  处的切面:  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
4.  $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x^2, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$   $S(x)$  为以  $2\pi$  为周期延拓后  $f(x)$  的傅里叶级数的和函数, 则  $S(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
5.  $\Sigma$  为  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z = 1$  围成的曲面 (不含  $z = 1$ ), 求  $\iint_{\Sigma} \frac{(x + y + z + 1)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 三、解答题 (共30分)

1. 设  $z = f(y^3, e^{2x} \cos y)$ , 且  $f'_2(0, e^2) = 1$ , 求  $dz|_{x=1, y=0}$ .
2. 判定级数  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$  的敛散性。
3. 将  $y = \arctan x^2$  展开为关于  $x$  的幂级数, 并指出收敛域。
4. 计算曲线积分  $\int_S xy dx + x^2 dy$ , 其中  $S$  为  $y = 1 - |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , 方向从左到右。
5. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$ ,  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = 3$ , 求  $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz$ 。
6. 设  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ,  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上一阶连续可微, 且在边界上取值为 0。证明:
  - (1)  $\iiint_{\Omega} \left(3f(x, y, z) + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx dy dz = 0$ ;
  - (2) 令  $M = \max_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ , 证明  $\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \frac{\pi}{3} M$ 。