

2025年秋季学期哈尔滨工业大学(威海)期末考试题
数理逻辑与近世代数(近世代数部分)

【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「wuanweihua@gmail.com」,我会及时删除.

四、简答题(共20分)

1. 解答下列各题:
 - (1) 设 $G = \langle a \rangle$ 为 5 阶群,求该群的全部生成元。(2分)
 - (2) 求对称群 S_3 的 3 阶子群,并求其全部左陪集。(4分)
 - (3) 整数环 \mathbb{Z} 有几个可逆元?(2分)
 - (4) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上可定义多少个二元运算?(2分)
2. 设 S_{24} 为 24 的全部正因子构成的集合, S_{24} 关于整除关系形成格,解答下列问题:
 - (1) 作出该格的哈斯图。(2分)
 - (2) 该格是否为有补格?若是,给出每个元素的全部补元;若不是,给出其中的可补元素。(4分)
 - (3) 该格是否为分配格?(2分)
 - (4) 该格是否为布尔代数?(2分)

五、证明题(共30分)

1. 设 $(G, *)$ 为代数系统,满足:对任意的 $x, y \in G$,若 $x \neq y$,则必有 $x * y \neq y * x$ 。
证明:对任意的 $a \in G$,都有 $a * a = a$ 。(5分)
2. 设 (G, \circ) 为交换群,且群的阶 $|G| = 2p$ (其中 p 为奇数),证明:
 - (1) G 必存在 2 阶子群;(5分)
 - (2) G 的 2 阶子群是唯一的。(5分)
3. 设 (G, \circ) 为交换群,令集合 $H = \{x \mid x \in G \text{ 且 } x \text{ 的阶数有限}\}$,证明: H 是 G 的子群。(5分)
4. 设 $(G, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 为布尔代数,若 $a \leq b$,证明: $a' \vee b = 1$ 。(5分)