

2020年春季学期哈尔滨工业大学(威海)期末考试试题

近世代数

【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖。
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「wuwanweihua@gmail.com」,我会及时删除。

一、问答题(每题10分,共30分)

1. 含有6个元素的环一定存在吗?如果存在,则该环可能是无零因子环吗?请给出理由;如果不存在,请给出证明。(10分)
2. 试举两个含有6个元素 $\{a, b, c, d, e, f\}$ 的格,要求:其中一个为分配格,另一个不是分配格,分别用哈斯图表示(即分别画出哈斯图)。同时说明其中的分配格是否为有补格?为什么?(10分)
3. 设 n 为正整数, S_n 为 n 的正因子构成的集合, S_n 关于整除关系构成格。请问: S_{30}, S_{36} 能分别构成布尔代数吗?如果能,给出它的所有原子,并给出一个与其同构的布尔代数;如果不能,请给出理由。(10分)

二、计算题(每题10分,共30分)

1. 设 $R^* = R \setminus \{0\}$ 为非零实数集,在 R^* 上定义运算“ Δ ”: $\forall x, y \in R^*, x \Delta y = 2xy$ 。请问: R^* 关于运算 Δ 能否做成一个群?请说明理由。(10分)
2. 设 $S = \{1, 2, 3\}$,3元对称群 $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ 。
 - (1) 请问 S_3 有几个子群?给出 S_3 的所有子群。(4分)
 - (2) 请问 S_3 是否存在3阶子群?如果存在,计算其中一个3阶子群的所有左陪集,并判断该3阶子群是否为正规子群或不交子群;如果不存在,请给出理由。(6分)
3. 设 (L, \wedge, \vee) 是一个格, (M, \cap, \cup) 是一个具有两个代数运算的代数系统。如果存在一个从 L 到 M 的满射 f ,使得 $\forall x, y \in L$ 有 $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$, $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$ 。请问: (M, \cap, \cup) 是一个格吗?并请说明理由。(10分)

三、证明题(每题10分,共40分)

1. 设 S 是一个么半群(含有单位元的半群), e 是 S 的单位元, $x, y \in S$ 。证明: x 是以 y 为逆元的可逆元当且仅当 $xyx = x, xy^2x = e$ 。(10分)
2. 设 G 为群, $a \in G$ 。如果 $\forall x \in G$,有 $ax = xa$ (或 $xax^{-1} = a$),则称 a 是 G 的中心元。试证:若群 G 中有唯一的2阶元,则该2阶元必是 G 的一个中心元。(10分)
3. 设 R 是一个无零因子环, $a \in R, a \neq 0$,且 $a^2 = a$ 。证明: a 是环 R 的单位元。(10分)
4. 设 (L, \vee, \wedge) 是一个格, $\forall a, b, c, d \in L$ 。证明:
 - (1) $(a \vee b) \wedge b = b$; (5分)
 - (2) $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$ 。(5分)