

2021年秋季学期哈尔滨工业大学(校本部)期末考试题

概率论与数理统计(C)

【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「wwwanweihua@gmail.com」,我会及时删除.

一、填空题(每小题3分,共5小题,满分15分)

1. 设相互独立的三个事件 A, B, C 满足 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.5, P(C) = 0.5$, 则 $P(A - C | A \cup B \cup C) =$ _____。
2. 随机向量 (X, Y) 的分布列为

	-1	0	1
-1	c	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	a

且 $P(XY = 0) = 0.6, P(Y \geq 0 | X \geq 0) = \frac{3}{4}$, 则 $a+3b+3c =$ _____。

3. 随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则 $Y = 1 - 3X$ 的概率

密度函数 $f_Y(y) =$ _____。

4. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 其中 $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 1, \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则 $D(2X + 3Y) =$ _____。
5. 随机地取某种炮弹 9 发作试验,测得炮口速度的样本标准差 $S = 11m/s$ 。设炮弹出口速度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求这种炮弹的出口速度方差 σ^2 的置信度为 95% 的置信区间为 _____。

(可用: $\chi_{0.975}^2(9) = 2.700, \chi_{0.975}^2(8) = 2.18, \chi_{0.05}^2(9) = 16.919, \chi_{0.025}^2(8) = 17.535$)

二、选择题(每小题3分,共5小题,满分15分)

1. 设 A, B, C 是三个独立的随机事件且 $0 < P(A), P(B), P(C) < 1$, 则在下列给定的四对事件中不相互独立的是 ()
 - A. $A \cup B$ 与 C
 - B. AB 与 \bar{C}
 - C. $A - B$ 与 \bar{C}
 - D. BC 与 \bar{C}
2. 下列函数中可以作为随机变量分布函数的是 ()

$$\begin{aligned}
 \text{A. } F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{2}{3}, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} \\
 \text{B. } F(x) &= \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{1+x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
 \text{C. } F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ x, & \frac{\pi}{4} \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \\
 \text{D. } F(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{3}{2} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2, \\ 2, & x > 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

3. 设 $X \sim U(0, 1)$, Y 的分布列为 $P(Y = 0) = \frac{1}{2} = P(Y = 2)$, 且 X, Y 独立, $Z = 2X + Y$, 则 $D(Z^{1/2})$ 为 ()
- A. $\frac{9}{16}$ B. $\frac{13}{16}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{2}{9}$
4. 设随机变量 $X \sim N(6, 9)$, $Y \sim P(6)$, 且 $\rho_{XY} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, 则根据切比雪夫不等式有:
 $P(X - 4 < Y < X + 4)$ ()
- A. $\geq \frac{9}{16}$ B. $\geq \frac{7}{16}$ C. $\leq \frac{9}{16}$ D. $\leq \frac{7}{16}$
5. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, \dots, X_n 是来自 X 的样本, 则下列结论正确的是 ()
- A. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$
- B. $(\bar{X} - \mu) \sqrt{\frac{n(n-1)}{\sum (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(n-1)$
- C. $\frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n)$
- D. $S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

三、(8分)

1. 设有 n 盒产品, 第 i 盒中的产品使用寿命服从参数为 λ_i 的指数分布 ($\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$)。现等可能地从这 n 盒中任选一盒, 再从该盒中取一件产品, 求该产品的使用寿命 X 的概率密度函数。

四、(8分)

1. 设随机变量 X, Y 的联合分布在以 $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 为顶点的三角形区域内服从均匀分布, 设 $M = \max(X, Y)$, $N = \min(X, Y)$, 求:

- (1) 随机变量 $V = 2X + Y$ 的方差;
- (2) MN 的期望。

五、(8分)

1. 设随机变量 $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 求随机变量 $Y = \cos X$ 的概率密度函数。

六、(12分)

1. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{\sqrt{\pi}\alpha^3}e^{-x^2/\alpha^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $\alpha > 0$,

X_1, \dots, X_n 为简单随机样本。求:

- (1) α 的矩估计 $\hat{\alpha}_1$ 和 α^2 的最大似然估计 $\hat{\alpha}_2^2$;
- (2) 矩估计 $\hat{\alpha}_1$ 是否为 α 的无偏估计;
- (3) 最大似然估计 $\hat{\alpha}_2^2$ 是否为 α^2 的无偏估计;
- (4) $\hat{\alpha}_1$ 是否为 α 的相合估计, 并说明理由。

七、(4分)

1. 设 X, Y 为独立同分布的随机变量, 且 $P(X = i) = \frac{1}{m}, i = 1, 2, \dots, m$, 求 $E|X - Y|$ 。