

2022年秋季学期哈尔滨工业大学(一校三区) 期末考试试题

概率论与数理统计(C)

【声明】

1. 本项目为公益项目, 旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用, 请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版, 不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘, 用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出, 可以联系「wuwanweihua@gmail.com」, 我会及时删除.

一、填空题(每小题3分, 共5小题, 满分15分)

1. 设事件 A, B 都不发生的概率为 0.3, 且 $P(A) = 0.4$, 则 B 发生而 A 不发生的概率为 _____.
2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 2x^3e^{-x^2}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 则 $Y = 2X + 3$ 的概率密度为 _____.
3. 设随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 且 $P(X = 1) = P(X = 2)$, 则 $P(X > 1) =$ _____.
4. 设随机变量 X 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布, $Y \sim N(1, 4)$, 且 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$, 根据切比雪夫不等式有: $P(-4 + 2Y \leq X \leq 2Y + 4) \geq$ _____.
5. 已知一批零件的长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 若 σ 未知, 从中随机抽取 9 个零件, 得样本均值 $\bar{x} = 20$, 样本方差 $s^2 = 4$, 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 _____.(保留小数点后三位)

(可用: $t_{0.025}(8) = 2.3060, t_{0.05}(8) = 1.8595, t_{0.025}(9) = 2.2622, t_{0.05}(9) = 1.8331, \Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$)

二、单项选择题(每小题3分, 共5小题, 满分15分)

1. 设 $0 < P(B) < 1, P(A_1)P(A_2) > 0$, 且 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 则下列等式成立的是 ()
 - A. $P(A_1 \cup A_2 | \bar{B}) = P(A_1 | \bar{B}) + P(A_2 | \bar{B})$
 - B. $P(A_1 B \cup A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$
 - C. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$
 - D. $P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)$
2. 如下四个函数, 能做为随机变量的分布函数的是 ()

- A. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 1, & x \geq \pi, \end{cases}$
- B. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, 其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$
- C. $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, x \in \mathbb{R}$
- D. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

3. 设随机变量 $X_i (i = 1, 2)$ 的分布列为 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 且满足 $P(X_1 X_2 = 0) = 1$, 则 $P(X_1 = X_2) =$ ()

- A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(|X - Y| < 1)$ ()

- A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关
 B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关
 C. 与 μ, σ^2 都有关
 D. 与 μ, σ^2 都无关

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 统计量 $Y = \frac{1}{n} \left(\frac{S}{\bar{X} - \mu} \right)^2$, 其中 \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则 ()

- A. $Y \sim \chi^2(n-1)$ B. $Y \sim t(n-1)$
 C. $Y \sim F(n-1, 1)$ D. $Y \sim F(1, n-1)$

三、(9分)

1. 两箱产品: 第一个箱子里装有 10 个合格品和 40 个次品, 第二个箱子里装有 18 个合格品和 12 个次品。随机挑中两个箱子中的一个并随机拿出两个产品, 如果第一次拿出的是合格品, 问第二次拿出的也是合格品的概率是多少?

四、(8分)

1. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$

求

- (1) 在 $Y = y$ 条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$;
 (2) $Z = X + Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 。

五、(9分)

1. 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ 内服从均匀分布, 求

- (1) $P(X < Y)$;
 (2) 随机变量 $Z = \max(X, Y)$ 的概率密度;
 (3) $E(Z), D(Z)$ 。

六、(10分)

1. 设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}, \theta > 0, X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求:

自总体 X 的简单随机样本, 求:

- (1) 未知参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计 $\hat{\theta}_2$;
 (2) 讨论上述矩估计 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性。

七、(4分)

1. 设随机变量 X 只取 $[0, 1]$ 上的值, 证明: $D(X) \leq \frac{1}{4}$, 并说明等号成立的条件。