

2023年秋季学期哈尔滨工业大学(校本部)期末考试题

概率论与数理统计(C)

【声明】

1. 本项目为公益项目, 旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用, 请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版, 不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘, 用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出, 可以联系「wuwanweihua@gmail.com」, 我会及时删除.

一、单项选择题(每小题3分, 共5小题, 满分15分)

1. 设随机事件 A, B 相互独立, 且 $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$, 则 $P(\bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B) = (\quad)$
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{3}{4}$
2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.4\Phi(2x - 1) + 0.6\Phi\left(\frac{x - 1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) = (\quad)$
 A. 0.2 B. 0.4 C. 0.6 D. 0.8
3. 设随机变量 X, Y 相互独立, $X \sim N(-1, 2)$, $Y \sim N(2, 3)$, 则关于 $Z = 2X + 3Y + 1 \sim (\quad)$
 A. $N(-5, 13)$ B. $N(5, 13)$ C. $N(5, 35)$ D. $N(5, 97)$
4. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} xe^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则 $P(X + Y < 1) = (\quad)$
 A. $1 - \frac{1}{2}e^{-1} - e^{-1/2}$ B. $1 - e^{-1} - e^{-1/2}$
 C. $1 - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1/2}$ D. $1 - e^{-1} - 2e^{-1/2}$
5. 设 $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 统计量 $T = \frac{a \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}}$ 服从 t 分布, 则常数 $a = (\quad)$
 A. $\sqrt{\frac{m}{n}}$ B. $\sqrt{\frac{n}{m}}$ C. $\frac{m}{n}$ D. $\frac{n}{m}$

二、填空题(每小题3分, 共5小题, 满分15分)

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} ax^2e^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设随机变量 X 服从泊松分布, 若 $P(X \geq 1) = 1 - e^{-3}$, 则 $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 将 2 米木棒随机截成三段, 三段的长度依次为随机变量 X, Y, Y , 则 X 与 Y 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设随机变量 X 服从参数为 $\frac{1}{4}$ 的几何分布, 随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, X 与 Y 的相关系数为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 应用切比雪夫不等式估计 $P(4Y - 3 < X < 3 + 4Y) \geq \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_{16} 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 503.75$, 样本标准差 $s = 6.2$, 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 _____。(结果四舍五入, 保留小数点后三位)

三、(满分9分)

1. 设甲乙两袋都装有 3 个红球、4 个黑球。现在从甲袋中任取 3 个球放入乙袋, 然后从乙袋中任取 1 个球。
- (1) 求从乙袋中取到 1 个黑球的概率;
 - (2) 若从乙袋中取到 1 个黑球, 求从甲袋中至少取到 2 个黑球的概率。(结果化简为最简真分数)

四、(满分9分)

1. 设随机变量 X 服从参数为 $\frac{1}{3}$ 的两点分布, 随机变量 Y 服从参数为 $\frac{1}{4}$ 的两点分布, 已知 $P(X = 0, Y = 0) = \frac{7}{12}$ 。
- (1) 求 (X, Y) 的概率分布;
 - (2) 求 X 与 Y 的相关系数;
 - (3) 求 $P(X^2 + Y^2 = 1 | X = 1)$ 和 $P(X = 1 | X^2 + Y^2 = 1)$ 。

五、(满分9分)

1. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$
- (1) 讨论 X, Y 是否独立, 并说明理由;
 - (2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

六、(满分9分)

1. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \lambda) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda} (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $\lambda > 0$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本。
- (1) 求 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$;
 - (2) 求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$;
 - (3) 求 $E(\hat{\lambda}_2)$ 和 $D(\hat{\lambda}_2)$ 。

七、(满分4分)

1. 设 $F(x)$ 是连续型随机变量 X 的分布函数, 且存在二阶导数, 常数 $a > 0$, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} [F(x+a) - F(x)] dx = a$ 。