

2024年秋季学期哈尔滨工业大学(校本部)期末考试题

概率论与数理统计(C)

【声明】

1. 本项目为公益项目,旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用,请勿拿去售卖。
2. 本试卷为回忆版,不存在窃题漏题等作弊嫌疑.部分数据被遗忘,用编造的数据替代.如认为该题目不应当流出,可以联系「wuwanweihua@gmail.com」,我会及时删除。

一、单项选择题(每题3分,共15分)

1. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} ax^b, & 0 < x < 1, \\ 0, & v \end{cases}$, 且 $E(X) = \frac{3}{4}$, 则
()
 A. $a = 3, b = 2$ B. $a = 2, b = 3$ C. $a = 3, b = 4$ D. $a = 4, b = 3$
2. 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 1; 3, 3; 0.5)$, 则根据切比雪夫不等式 $P(|X - Y| \geq 3)$ ()
 A. $\leq \frac{1}{3}$ B. $\leq \frac{2}{3}$ C. $\geq \frac{1}{3}$ D. $\geq \frac{2}{3}$
3. 设随机变量 $X \sim N(1, 1)$, 则 $E(X^2 e^X) =$ ()
 A. $5e^{\frac{1}{2}}$ B. $3e^{\frac{1}{2}}$ C. $5e^{\frac{3}{2}}$ D. $3e^{\frac{3}{2}}$
4. 设随机变量 $X \sim N(2, 1)$, $Y \sim N(1, 2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 ()
 A. $P(X + Y \leq 2) = \frac{1}{2}$ B. $P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{2}$
 C. $P(X - Y \leq 2) = \frac{1}{2}$ D. $P(X - Y \leq 1) = \frac{1}{2}$
5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 统计量 $Y = (n - 1) \left(\frac{\bar{X} - \mu}{S} \right)^2$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 ()
 A. $Y \sim F(n - 1, 1)$ B. $Y \sim F(1, n - 1)$ C. $Y \sim \chi^2(n - 1)$ D. $Y \sim t(n - 1)$

二、填空题(每题3分,共15分)

1. 设随机事件 A, B 满足 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, $P(B|A) = 0.8$, 则 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ _____。
2. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $Y = 2X + 3$ 的概率密度函数 $f_Y(y) =$ _____。
3. 设 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数, $f(x)$ 为区间 $[-1, 4]$ 上的均匀分布的概率密度函数, $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}\varphi(x), & x \leq 0, \\ af(x), & x > 0, \end{cases}$ 也是一个概率密度函数, 则常数 $a =$ _____。
4. 若随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布, 则 $P(X > 5 | X > 2) =$ _____。
5. 设 X_1, \dots, X_{16} 来自总体 $N(\mu, 9)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 305$, 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 _____。

三、解答题(共55分)

1. (9分) 基本数字通信系统问题。

信源发出 0 或 1 两个符号之一, 发出 0 与 1 的比例为 4:3。传送符号 0 时失真率为 $\frac{1}{5}$, 传送符号 1 时失真率为 $\frac{1}{4}$ 。

- (1) 求接收台收到符号 1 的概率;
 - (2) 若接收台收到符号 1, 求信源发出的符号恰为 1 的概率。
2. (9分) 设随机变量 Y 在区间 $[-2, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0, & Y \leq k-1, \\ 1, & Y > k-1, \end{cases} \quad (k=1, 2).$$

- (1) 求二维随机变量 (X_1, X_2) 的概率分布;
 - (2) 求随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数。
3. (9分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0, & v. \end{cases}$$

- (1) 讨论 X, Y 是否独立, 并说明理由;
 - (2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数。
4. (9分) 设总体 X 的分布函数

$$F(x; \theta) = \begin{cases} x^{1/\theta}, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad \theta > 0.$$

X_1, \dots, X_n 为简单随机样本。

- (1) 求 θ 的矩估计量与最大似然估计量;
 - (2) 判断最大似然估计量是否为无偏估计;
 - (3) 判断最大似然估计量是否为相合估计。
5. (9分) 传送器随机发出 0 和 1, 发出 1 的概率为 p , 发出 0 的概率为 $1-p$, 各次独立。设一定时间内发出信号总数服从参数为 λ 的泊松分布。求同一时间内发出信号 1 的个数 X 的概率分布。