

2025年秋季学期哈尔滨工业大学(威海)期末考试

概率论与数理统计(C)

【声明】

1. 本试卷为计算机科学与技术学院期末考试题, 考试时间为2025年12月15日, 考试时间120分钟, 考试课, 卷面成绩占比70%.
2. 本项目为公益项目, 旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用, 请勿拿去售卖.
3. 本试卷为回忆版, 不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘, 用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出, 可以联系「[wwwanweihua@gmail.com](mailto:wwwanweihua@gmail.com)」, 我会及时删除.

一、单项选择题 (每题2分, 共14分)

1.  $(X, Y) \sim N(0, 0, 1^2, 1^2, 0)$ , 则  $P\left(\frac{X}{Y} < 0\right) =$   
 A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{5}$
2.  $X, Y$  的方差存在且非零, 则  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$  是  
 A.  $X, Y$  不相关的充分条件, 但不是必要条件  
 B.  $X, Y$  不相关的必要条件, 但不是充分条件  
 C.  $X, Y$  独立的充分条件, 但不是必要条件  
 D.  $X, Y$  独立的必要条件, 但不是充分条件
3.  $D(X) = D(Y)$ ,  $X, Y$  独立, 则  $X + Y$  和  $Y$  的相关系数是  
 A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$                       D. 0
4. 已知  $X, Y$  独立同分布, 分布函数为  $F$ , 则  $Z = \max(X, Y)$  的分布函数为  
 A.  $[F(z)]^2$                       B.  $F(x)F(y)$                       C.  $[1 - F(z)]^2$                       D.  $(1 - F(x))(1 - F(y))$
5. 样本  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  已知,  $\sigma$  未知, 下列哪个不是统计量  
 A.  $X_{(1)}$                       B.  $X_1 + \sigma$                       C.  $\bar{X} + \mu$                       D.  $X_n$
6.  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布, 服从参数为  $\frac{1}{2}$  的指数分布, 根据中心极限定理,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  近似服从  
 A.  $N\left(2, \frac{4}{n}\right)$                       B.  $N(2n, 4)$                       C.  $N(0, 1)$                       D.  $N(2n, 4n)$
7. 总体  $X \sim N(0, 4)$ , 简单随机抽样得样本  $X_1, \dots, X_{17}$ ,  $S^2$  为样本方差,  $P(S^2 > a) = 0.01$ , 则  $E(S^2 - a) + D(S^2 - a) =$  (已知  $\chi_{0.01}^2(16) = 32$ )  
 A. 2                      B. 4                      C. -2                      D. -4

二、不定项选择题 (每题2分, 共4分)

1. 总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $S^2$  为样本方差,  $\bar{X}$  为样本均值, 下列各式正确的有  
 A.  $n\left(\frac{\bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$                       B.  $\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$   
 C.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$                       D.  $\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\sigma}\right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$
2. 事件  $A, B, C$ , 其中事件  $A, B$  独立, 则下列各式正确的有  
 A.  $P(C) = 1$  时,  $AC$  和  $BC$  独立                      B.  $P(C) = 1$  时,  $A \cup C$  和  $B$  不独立  
 C.  $P(C) = 1$  时,  $A - C$  和  $B$  独立                      D.  $C \subset B$  时,  $A$  和  $C$  也独立

三、填空题 (每题2分, 共12分)

- $P(A) = 0.8, P(B) = 0.3, P(A | \bar{B}) = 0.5$ , 则  $P(A \cup B) =$  \_\_\_\_\_。
- 先从  $1, 2, 3, 4$  中等可能地取出一个数, 记作  $X$ ; 再从  $1, \dots, X$  中随机取出一个数, 记作  $Y$ , 则  $P(Y = 3) =$  \_\_\_\_\_。
- 随机变量  $X \sim U[0, 6], Y \sim P(3)$ , 且  $X, Y$  独立, 利用切比雪夫不等式估计  $P(|X - Y| < 3) \geq$  \_\_\_\_\_。
- 总体  $X$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2 = 9$ , 样本为  $X_1, \dots, X_n$ , 对参数  $\mu$  的置信度为  $0.95$  的区间估计为  $(\bar{X} - 0.98 < \mu < \bar{X} + 0.98)$ , 则样本容量  $n =$  \_\_\_\_\_。(标准正态分布满足:  $\Phi(1.96) = 0.975$ )
- $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, & x \in [1, 8], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  其分布函数为  $F$ , 随机变量  $Y = F(X)$ , 则  $Y$  的概率密度函数为  $f_Y(y) =$  \_\_\_\_\_。
- 独立而重复地向一个靶子射箭, 每次射中的概率为  $p$ , 直到射中  $r$  次后才停止, 记射箭的次数为随机变量  $X$ , 则  $EX =$  \_\_\_\_\_。

四、解答题 (共70分)

- (本题满分20分) 随机变量  $(X, Y)$  服从  $D$  上的二维均匀分布, 其中区域  $D$  由直线  $x = 0, x - y = 0, x + y = 2$  围成, 求:
  - $Y$  的边缘概率密度函数  $f_Y(y)$ ;
  - 在  $X = x$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度函数  $f_{Y|X}(y | x)$ ;
  - $EX^2$  和  $EXY$ 。
- (本题满分18分) 随机变量  $X, Y$  的分布列为  $X, Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ , 且  $EXY = \frac{5}{8}$ , 解答以下问题:
  - 求  $(X, Y)$  的联合分布列 (直接写出表格);
  - 求  $P(X + Y \leq 1)$ ;
  - 判断  $X, Y$  是否独立、是否相关, 并说明理由。

- (本题满分18分) 随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

解答以下问题:

- 求  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}_1$ , 并判断  $\hat{\theta}_1$  是否为  $\theta$  的无偏估计;
  - 求  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}_2$ 。
- (本题满分14分) 随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $\{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$  上的二维均匀分布。随机变量  $U = \begin{cases} 1, & X \geq Y, \\ 0, & X < Y. \end{cases}$  解答以下问题:
    - 求  $(X, Y)$  的联合概率密度;
    - 求  $Z = U + X$  的分布函数  $F_Z(z)$ 。