2024年秋季学期哈尔滨工业大学（一校三区）期末考试题

代数与几何X

【声明】

1. 本项目为公益项目，旨在帮助学弟学妹期末备考、或同级学生补考复习使用，请勿拿去售卖.
2. 本试卷为回忆版，不存在窃题漏题等作弊嫌疑. 部分数据被遗忘，用编造的数据替代. 如认为该题目不应当流出，可以联系「*wuwanweihua@Gmail.com*」，我会及时删除.

一. 填空题（满分10分，每小题2分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ ________ .
2. 在空间直角坐标系中，点 $M(2,0,1)$ 到平面 $\pi: 5x+3y-4z+4=0$ 的距离 $d=$ ________ .
3. 已知 A 为 3 阶可逆矩阵，且特征值为 $1,-1,\dfrac{1}{5}$，若矩阵 B 与 A 相似，则 $|B^{-1}-2E|=$ ________ .
4. 母线平行于 y 轴，且通过空间曲线 $x^2+2y^2+3z^2=6,\ x^2-y^2+z^2=0$ 的柱面的方程为 ___________ .
5. 设 A 为 2 阶方阵，若 $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$， $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，则 $A^5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=$ ________ .

二. 单选题（满分10分，每小题2分，只有一个正确选项）

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个解向量，且 $R(A)=2$，$\alpha_1+\alpha_2=(2,0,-2)^T$， $\alpha_2+2\alpha_3=(4,5,-1)^T$， k 为任意常数，则 $AX=\beta$ 的通解为（　）

   A. $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2. 设 A 为 n 阶实矩阵，下列命题错误的是（　）

   A. $R(A)=R(AA^T)$

   B. 若对任意非零实向量 X 有 $X^TAX>0$，则 A 为正定矩阵

   C. 若 A 为正定矩阵，则 A 可逆

   D. A 可逆的充要条件为 A^TA 为正定矩阵

3. 设 $\mathcal{A}$ 为二维线性空间 V_2 中的线性变换， $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 与 α_1,α_2 是 V_2 的两组基，满足 $\alpha_1=\varepsilon_2$， $\alpha_2=-\varepsilon_1+\varepsilon_2$，且 $\mathcal{A}(\alpha_1)=2\alpha_2$， $\mathcal{A}(\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2$，则 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为（　）

   A. $\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}-3&-2\\2&2\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}-3&2\\-2&2\end{pmatrix}$

4. 直线 $L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$， $L_2: x=a_2t+a_3,\ y=b_2t+b_3,\ z=c_2t+c_3$ 相交于一点，设 $\alpha_i=(a_i,b_i,c_i)^T$，则方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\alpha_3$ 的情况为（　）

   A. 有唯一解　B. 有无穷多解　C. 无解　D. 无法判断

5. 某地统计大熊猫种群变化，每年新生大熊猫中 95% 在下一年成长为成年大熊猫，下一年新生数量为上一年成年数量的 6%，成年大熊猫中每年有 3% 因疾病死亡。设第 k 年新生数量为 j_k，成年数量为 a_k，则正确的递推关系为（ ）
   A. $\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.06 \\ 0.97 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.06 \\ 0.95 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 & 0 \\ 0.95 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 & 0 \\ 0.97 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}$

三．不定项选择题（满分2分，每小题1分）

1. 设 A 为 3 阶矩阵， $AX_i = \lambda_i X_i$， $X_i \neq 0$， $i = 1, 2, 3$，下列叙述错误的是（ ）
   A. X_1, X_2, X_3 线性无关
   B. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同，则 A 可相似对角化
   C. 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$，则 A 不可相似对角化
   D. 若 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$，则 A 的特征向量为 $k_1X_1 + k_2X_2, k_3X_3$
2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 为 n 维实向量空间中的两个向量组，则下列叙述错误的是（ ）
   A. 若 $r \leq s$，则 $\beta_1, \ldots, \beta_s$ 不可由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性表示
   B. 若 β_1 可由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 表示，则存在不全为零的 $k_1, \ldots, k_r$
   C. 若矩阵 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$， $B = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ 等价，则两向量组等价
   D. 若向量组中任意两个向量正交，则该向量组线性无关

四．（满分8分）

1. 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T$， $\alpha_2 = (2, 1, -2)^T$ 为二维向量空间 V 的一组基：
   (1) 设 $\gamma_1 = \dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$，求一向量 γ_2，使 γ_1, γ_2 构成 V 的一组规范正交基；
   (2) 求基 α_1, α_2 到 γ_1, γ_2 的过渡矩阵。

五．（满分8分）

1. 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX = 2E - X$，求 X。

六．（满分8分）

1. 已知线性方程组 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$， $x_2 + ax_3 = 2$， $x_1 + ax_2 = b$，讨论 a, b 取何值时该方程组无解、唯一解或无穷多解，并在无穷多解时写出通解。

七．（满分10分）

1. 设三元二次型 $f = X^TAX$，已知 A 的各行元素之和为 2， $\mathrm{tr}(A) = 8$，且线性方程组 $(E - A)X = 0$ 有非零解 $(1, 0, -1)^T$：
   (1) 求 A 的所有特征值；
   (2) 求正交线性变换 $X = PY$，将 f 化为标准形；
   (3) 求矩阵 A。

八．（满分4分）

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 为 m 个 n 维实向量，矩阵 $A = ((\alpha_i, \alpha_j))$：
   (1) 若向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，判断 $|A|$ 是否为零；
   (2) 若向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，判断 $|A|$ 的符号。